

Seminarvortrag: Die Bahnberechnung der Himmelskörper

Josef Koller
Institut für Astronomie

Innsbruck, den 5. November 1996

1 Vorwort

Seitdem es die Astronomie gibt, besteht auch der Wunsch, die Stellungen der Himmelskörper zu berechnen. Inzwischen hat sich aber einiges verändert. Vor fünfzig Jahren war man noch auf die Hilfe von Tabellenwerken angewiesen. Und so wurden die Rechenmethoden speziell auf logarithmische Verfahren zugeschnitten.

Durch die Entwicklung des Taschenrechners und der Computer wurden diese Methoden teilweise obsolet. Einerseits öffnete sich damit die Ephemeridenrechnung für einen größeren Interessentenbereich, andererseits entstand durch das rasche Ablösen der logarithmischen Methode ein Mangel an Literatur zu diesem Thema. Bücher zum Thema Himmelsmechanik widmen sich fast ausschließlich der abstrakten und theoretischen Behandlung des Problems. Daten und Formeln, die für die eigentliche Berechnung einer Bahn bzw. der Ephemeriden, sind darin nicht zu finden. Und ältere Werke entsprechen eben nicht mehr den heutigen Möglichkeiten und verstauben meist in den hintersten Winkeln der Bibliotheken. Ein wirklich gutes Buch habe ich erst nach diesem Seminarvortrag entdeckt. Es handelt sich dabei um Guthmann Andreas: *Einführung in die Himmelsmechanik und Ephemeridenrechnung* aus dem BI-Verlag [5].

Bei diesem Seminarvortrag möchte ich vorerst einen kurzen Überblick über die Entwicklung der Bahnbestimmung geben. Anschließend werde ich die wichtigsten Sätze der theoretischen Himmelsmechanik für das Zwei-Körper Problem wiederholen. Auf die Herleitung der Formeln habe ich im wesentlichen verzichtet, zumindest sind aber die Voraussetzungen und die wichtigsten Schritte angegeben. Es sei hier vorallem auf die Vorlesung Theoretische Mechanik I verwiesen.

Nachdem die Voraussetzungen für eine Bahnbestimmung geschaffen worden sind, werde ich kurz erläutern, wie die Beobachtungsdaten zu reduzieren sind. Für die eigentliche Bahnberechnung habe ich eine spezielle Methode herausgegriffen, die mir am geeignetsten für einen Seminarvortrag erschien. Ich werde die einzelnen Schritte durchgehen, die mit dieser Methode notwendig sind. Ausgehend von der Beobachtung werden wir die Bahnelemente bestimmen und daraus die äquatorialen Koordinaten des Himmelskörpers für beliebige Zeitpunkte berechnen. Dabei habe ich mich vollends auf das Zwei-Körper Problem beschränkt, das für eine erste Bahnbestimmung auf jeden Fall genügt. Denn das Ziel einer ersten Berechnung der Bahn ist nicht die Genauigkeit, sondern den entdeckten Kometen oder Planetoiden nach einer Schlechetterperiode wieder zu finden.

Abschließend möchte ich mich bei allen bedanken, die mir beim Korrekturlesen mit vielen Anregungen geholfen haben.

Innsbruck, den 5. November 1996

Josef Koller

Inhaltsverzeichnis

1	Vorwort	1
2	Das Problem der Bahnbestimmung und seine Geschichte	3
2.1	Ansätze zur Bahnrechnung vor Newton	3
2.2	Die Zeit von Newton bis Olbers	3
2.3	Die Bahnbestimmung der Kometen im 19. Jahrhundert und heute	4
3	Das Zwei-Körper-Problem	5
3.1	Die Bewegungsgleichungen	5
3.2	Die Bahnelemente	6
3.3	Erhaltungsgrößen in der Himmelsmechanik	8
3.4	Das erste Keplersche Gesetz (Die Bahngleichung)	9
3.5	Das zweite und dritte Keplersche Gesetz	10
3.6	Die Position in der Bahn	11
4	Reduktion der Ausgangsdaten	13
4.1	Einige zielführende Überlegungen	13
4.2	Datenreduktion	14
4.2.1	Die Beobachtungszeit	14
4.2.2	Die Refraktion	14
4.2.3	Die Parallaxe	15
4.2.4	Die Aberration	15
4.2.5	Die Präzession und Nutation	16
5	Eine einfache Methode der Bahnbestimmung	16
5.1	Notation und Voraussetzungen	17
5.2	Die Bahnbestimmung	18
5.3	Bestimmung der Bahnelemente aus Orts- und Geschwindigkeitskoordinaten	21
6	Berechnung ungestörter Ephemeriden aus den Bahnelementen	21

2 Das Problem der Bahnbestimmung und seine Geschichte

2.1 Ansätze zur Bahnrechnung vor Newton

In der Antike war über die Natur und Herkunft der Kometen nur wenig bekannt. Für lange hielt sich die Meinung, daß Kometen keine Himmelskörper sondern von der Erde ausgespuckte und in die Luft geschleuderte Massen darstellen. Nur der römische Philosoph Seneca vertrat eine andere Sichtweise: Kometen sind Himmelskörper, die sich aber von den Planeten unterscheiden, da sie erst sichtbar werden, wenn sie sich der Erde nähern.

Man sollte sich nicht wundern, daß Aristoteles, sowie auch Ptolemäus, Kometen nicht zur Domäne der Astronomie zählte, weil diese mit bloßem Auge nur selten und nur für kurze Zeit zu sehen sind. Ebenso fehlt die Periodizität, die bei Planeten zu beobachten ist.

Erst in der Renaissance, kurz nachdem Kopernikus zeigte, daß die Erde um die Sonne läuft, kam jemand auf die Idee, nachzuprüfen, ob Kometen nun Himmelskörper sind oder nicht. So beobachtete der Nürnberger Astronom Regiomontanus den Kometen von 1472 mit dem Ziel, seine tägliche Parallaxe zu bestimmen. Er kam zu dem Schluß, daß Kometen weiter entfernt sind als der Mond, der eine Parallaxe von 1 Grad aufweist. Dieses erste Ergebnis, daß der Komet von 1577 keine meßbare Parallaxe aufweist, also sehr weit entfernt sein muß, wurde erst 100 Jahre später vom dänischen Astronom Tycho Brahe endgültig auf der Basis von präziseren Beobachtungen bestätigt.

Tycho Brahe war von der Richtigkeit seiner Meßwerte so überzeugt, daß er als erster versuchte, eine Bahn zu bestimmen. Anfangs hatte er noch einen geozentrischen Orbit angenommen, mit dem er aber kein zufriedenstellendes Ergebnis erhielt. Also berechnete Tycho Brahe erneut die Bahn des Kometen, diesmal aber mit einer heliozentrischen Bewegung. Auch mit dieser Annahme konnte er keine akzeptable Lösung finden, da er mit den Ptolemäischen Epizyklen eine Bahn zu bestimmen versuchte. Trotzdem ist es interessant, daß Tycho Brahe zum Schluß kam, Kometen beschreiben vermutlich keine kreisförmige Bahn, sondern einen eher eiförmigen Orbit. Das war eine sehr unbeliebte Meinung in einer Zeit, in der alles vom Konzept der vollkommenen Kreise bestimmt war.

Später waren Kopernikus und Kepler erfolgreicher im Erklären der Planetenbahnen. Im Besonderen mußten ja die Keplerschen Gesetze früher oder später zu einer erfolgreichen Bahnbestimmung der Kometen führen. Aber das geschah natürlich nicht auf einmal. So zum Beispiel nahm Kepler an, daß sich Kometen auf geraden Linien bewegen. Dies war eine für Kepler logische Schlußfolgerung, da er glaubte, daß Kometen nicht periodisch sind und er nur die Ellipse von all den Bahnformen kannte. Erst Borellius und Hevelius führten die Möglichkeit von einer parabolischen Bahn ein. Aber die Sonne wurde noch immer nicht in den Brennpunkt der Kegelschnitte gesetzt. Erst kurz bevor Newtons erste Principia erschien, machte Doerfel 1630 diesbezüglich eine Annahme.

Erst nachdem die Gesetze der Dynamik klar verstanden wurden und Newton sein universelles Gravitationsgesetz veröffentlichte, bekamen die Keplerschen Gesetze ihre heutige Bedeutung und die bekannte Form. Die von Kepler aufgestellten Methoden konnten nicht für Kometen verwendet werden, da in seine Berechnungen unzählige Beobachtungen über mehrere Perioden einfließen und diese sehr arbeitsaufwendig waren.

Erst mit Newton begann die Zeit der theoretische Astronomie, die Theorie also von der Bahnbestimmung von Kometen und später von Planetoiden.

2.2 Die Zeit von Newton bis Olbers

Newton bezeichnete das Problem der Bahnbestimmung von Kometen als außerordentlich schwierig, und er kam auch so schnell zu keiner brauchbaren Lösung. Aber nicht von den anfänglichen Problemen zu stoppen, arbeitete Newton auf der Basis von drei Beobachtungen eine im wesentlichen graphische Methode aus. Die Genauigkeit der Bahnelemente ließ dabei zu wünschen übrig; wir sollten dabei aber beachten, daß die Beobachtungen selber mit einem Fehler bis zu 15 Bogenminuten behaftet waren. Die Methode beruhte im wesentlichen darauf, daß die Sehne vom mittleren Radiusvektor im Verhältnis der Zeiten geschnitten wurde.

Mit diesem Ansatz berechnete Halley die Bahnen von 24 Kometen, die zwischen 1337 und 1698 beobachtet wurden, und veröffentlichte diese im Jahre 1705. Sein großer Aufwand mit den damaligen Rechenmethoden wurde durch die Entdeckung des ersten periodischen Kometen, der auch seinen Namen trägt, belohnt. Durch einen Vergleich der Bahnelemente der Kometen 1531, 1607 und 1682 war es Halley möglich, die Ähnlichkeit der Bahnelemente zu bemerken und daraus zu schließen, daß in diesen Jahren der selbe Komet erschienen war. Halley war von der Richtigkeit seiner Berechnungen überzeugt und sagte ein Wiedererscheinen des Kometen für Ende 1758 voraus. Die Bestätigung dieser Vorhersage wurde als ein Triumph des Gravitationsgesetzes gefeiert, eine klarer Triumph der mechanistischen Weltanschauung.

Den nächsten Schritt vorwärts machte nach Newton die Arbeit von J.H. Lambert. Im wesentlichen stützte er sich auf den Flächensatz. Lambert selbst hat die Früchte seiner erfolgreichen Bemühungen nicht selbst geerntet, da ihm der Sinn für die analytische Behandlung des Problems fehlte. Nur sie allein kann zu exakten Resultaten führen. Er kehrte im entscheidenden Augenblick immer wieder zur geometrischen Konstruktion zurück. Erst Olbers, der die geometrische mit einer analytischen Methode verknüpfte, trug den Erfolg davon.

Die von Lambert gegebenen Anregungen fielen aber auf fruchtbaren Boden. So schrieb 1777 die Berliner Akademie, die in der Geschichte der Bahnbestimmung überhaupt eine bedeutende Rolle spielte, eine Preisarbeit auf das Bahnproblem aus. Die eingelaufenen Arbeiten fanden zwar Beifall, konnten aber nicht als Fortschritt bezeichnet werden. Wichtiger aber war, daß sich eine Gruppe von Leuten (Lagrange, De Sèjour, Laplace) sich mit dem Problem zu beschäftigen begannen. Durch Lagrange erfuhr die Bahnbestimmung zum ersten Mal eine elegante analytische Behandlung und exakte Formulierung.

1780 veröffentlichte Laplace eine ganz neue Methode, die mit den früheren kaum einen Zusammenhang hatte. Diese wurde in Frankreich viel gebraucht. Weiters veröffentlichte De Sèjour zwei Methoden. Die erste davon wurde von Olbers ausführlich kritisch betrachtet, die zweite, von der De Sèjour selbst wenig gehalten hat, stellte sich später als identisch mit der Olberschen Lösungsmethode heraus.

Im Jahr 1797 erbrachte Olbers eine vollständige, in mathematischer wie praktischer Hinsicht befriedigende Lösung des Bahnproblems für Kometen. Er faßte in geschickter Weise die brauchbaren Ergebnisse seiner Vorgänger zu einer Methode zusammen, die im wesentlichen noch heute ohne Abänderung im Gebrauch ist. Zu solchen Abänderungen in den Einzelheiten haben Gauß und Encke beigetragen.

2.3 Die Bahnbestimmung der Kometen im 19. Jahrhundert und heute

Im 18. Jahrhundert war das Bahnbestimmungsproblem identisch mit dem Kometenproblem. Das allgemeine Problem, den Kegelschnitt ohne jede Voraussetzung über die Exzentrizität zu bestimmen, wurde mehr nebenher und aus analytischem Interesse behandelt. Eine vollständige Lösung des Bahnproblems wurde noch wichtiger, als die ersten Planetoiden entdeckt wurden. Gauß brachte neue fruchtbare Ideen und schuf die Grundlagen der astronomischen Rechenkunst, die die alten schwerfälligen Methoden erleichterten.

Die weitere Entwicklung erfolgte in zwei Richtungen, die von der Gaußschen und von der Laplaceschen Methode ihren Ausgang nahmen. So ist die Methode von Gauß-Encke die eigentliche Methode des Rechnens geworden. Weitere Arbeiten von dieser Richtung kamen von Hausen, Oppolzer, Klinkerfues und Gibbs.

Die Gaußsche Methode basiert auf der linearen Beziehung zwischen den drei heliozentrischen Positionen und den Sektorflächenverhältnissen.

Die Laplacesche Methode bezeichnete Lagrange als die analytisch einfachste Methode, die aber eine geringe Sicherheit des Resultats aufweist. Die Methode faßt zweifellos das Problem im Kern, aber die Hilfsmittel, deren sie sich bedient, sind unzulänglich; ersetzt man diese durch geeignetere, so kommt man eben auf die Gaußsche Methode.

Die Laplacesche Methode beruht im wesentlichen auf der ersten und zweiten Ableitung der topozentrischen Bewegung.

Einen Überblick über die Methoden, die heute verwendet werden, kann man sich in den Artikeln von B. Marsden [8],[9] verschaffen: The Astronomical Journal, Vol. 90, Nr. 8, 1985 und Vol. 102, Nr. 4, 1991. In diesen Artikeln wird auch die Methode von Väisälä, die von Oppolzer eingeleitet wurde, mit anderen verglichen.

Literatur zu all diesen Methoden und ihren Varianten ist nicht besonders schwierig zu finden, wahrscheinlich wird man aber eine auf logarithmisches Rechnen zugeschnittene Methode finden. Die Umgestaltung der Formeln, um sie für die Verwendung von Rechenmaschinen brauchbar zu machen, geschah erst nach und nach. So findet man viele Bahnen als Beispiel mit verschiedenen Methoden durchgerechnet - allerdings eben logarithmisch. Es ist heute sicher nicht mehr sinnvoll, solche Beispiele genau nachzuvollziehen, außer man arbeitet vielleicht an einer Verbesserung der Methode.

Hinweis: Logarithmisches Rechnen wurde deshalb verwendet, weil die händische Multiplikation von 2 Zahlen mit vielen Kommastellen schwerer ist als deren Addition. Es wird folgende Formel verwendet: $\log(AB) = \log A + \log B$. Man zog also von beiden Zahlen den Logarithmus (man schaute diesen in Tafel bis zu einer Genauigkeit auf 30 Stellen nach), addierte beide und zog dann den Antilogarithmus.

3 Das Zwei-Körper-Problem

3.1 Die Bewegungsgleichungen

Die Körper im Sonnensystem bewegen sich unter dem Einfluß der Gravitation - nach dem Gesetz von Newton. Die Körper selbst nehmen wir dabei als Massenpunkte an. Es besteht kein Zweifel, daß es sich dann nur um eine Approximation der Wirklichkeit handelt. Ebenso sind die Korrekturen am Gesetz von Newton durch die Relativitätstheorie sehr klein - es ist legitim, diese für die Bahnrechnung zu vernachlässigen.

Neben der Gravitationskraft gibt es auch noch andere Kräfte, die auf die Bahn von Kometen wirken können. Zusätzlich zum Strahlungsdruck auf Kometen ist die Impulsänderung durch ausgestoßene Gase besonders erwähnenswert. Dadurch verringert sich die Masse des Kometen ständig. Man nennt diese Kräfte auch nichtgravitative Kräfte. Aus diesen Gründen - und vielleicht aus einigen noch nicht bekannten - weichen Kometen immer wieder von den vorherberechneten Bahnen ab. Ein Beispiel dafür ist der Komet Encke, der trotz der vielen Beobachtungen und Bahnverbesserungen immer noch teils unbekannte Störungen aufweist.

Schreiben wir uns das Newtonsche Gravitationsgesetz ganz allgemein an:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = - \sum_{k=1}^n G m_i m_k \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_k}{|\vec{r}_{i,k}|^3} \quad (1)$$

\vec{r}_i ... Abstand der Masse m_i vom Schwerpunkt

$\vec{r}_{i,k}$... Abstand zwischen m_i und m_k

Lassen wir nun unsere obigen Annahmen einfließen und beschränken uns auf zwei Körper, dann erhalten wir für einen Kometen:

$$\vec{F} = m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -G m_1 m_2 \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (2)$$

Die Sonne erfährt natürlich die gleiche Kraft, jedoch in entgegengesetzter Richtung:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = G m_1 m_2 \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (3)$$

wobei r_1, r_2 durch Abbildung 1 verdeutlicht werden.

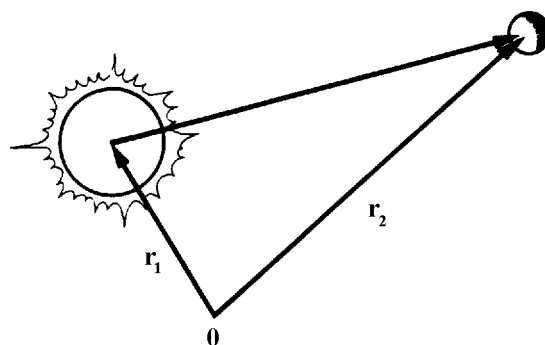


Abbildung 1: Darstellung der Radiusvektoren von der Erde zur Sonne und zum Objekt bzw. von der Sonne zum Objekt

Wir sind hauptsächlich an der Relativbewegung des Kometen im Bezug auf die Sonne interessiert. Um die Gleichung für die relative Bahn zu finden, fassen wir die Gleichungen (2) und (3) zusammen und erhalten:

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} \quad \text{wobei} \quad \mu = G(m_1 + m_2) \quad (4)$$

Diese Bewegungsgleichung ist eine Vektordifferentialgleichung zweiter Ordnung. In kartesischen Koordinaten erhalten wir 3 Differentialgleichungen, wenn der Koordinatenursprung in der Sonne liegt.

$$\ddot{x} = -\mu \frac{x}{r^3} \quad , \quad (5)$$

$$\ddot{y} = -\mu \frac{y}{r^3} \quad , \quad (6)$$

$$\ddot{z} = -\mu \frac{z}{r^3} \quad . \quad (7)$$

Daraus ist ersichtlich, daß bei diesen drei Differentialgleichungen zweiter Ordnung insgesamt sechs Integrationskonstanten bestimmt werden müssen, um eine Lösung zu erhalten. Eine spezielle Lösung, die Bahn unseres Kometen, wird durch die Wahl der sechs Konstanten aus dem Lösungsraum eindeutig festgelegt. Um jemandem eine Bahn mitzuteilen, braucht man nur diese sechs Konstanten, in weiterer Folge die sechs Bahnelemente, zu übermitteln.

3.2 Die Bahnelemente

Statt der sechs Integrationskonstanten des Zweikörperproblems, die als Bahnelemente die Grundlage der Ephemeridenrechnung bilden, können auch beliebige Systeme von Funktionen

$$[e_i = e_i(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \quad i = 1, \dots, 6]$$

dieser Konstanten als Bahnelemente benutzt werden. Allerdings muß die gegenseitige Umkehrung beider Systeme eindeutig sein. Aus diesen unendlich vielen Möglichkeiten hat man das System der gewöhnlichen (elliptischen, parabolischen, hyperbolischen) Kegelschnittelemente ausgewählt.

Wir benutzen ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit dem Ursprung im Mittelpunkt der Sonne. Die X-Y Ebene sei die der instantanen oder mittleren Ekliptik zu irgendeiner Epoche, wobei die positive X-Richtung zum Frühlingspunkt zeigt. Das bedeutet, daß das Äquinoktium zu den Bahnelementen immer anzugeben ist. Um für die Berechnung des geozentrischen Ortes (die Ephemeridenrechnung) Störungen miteinbeziehen zu können, werden die Bahnelemente für Äquinoktien vor und nach jeder einzelnen Störung veröffentlicht.

Als Bahnelemente (Abbildung 2) gibt man nun folgende sechs Größen an:

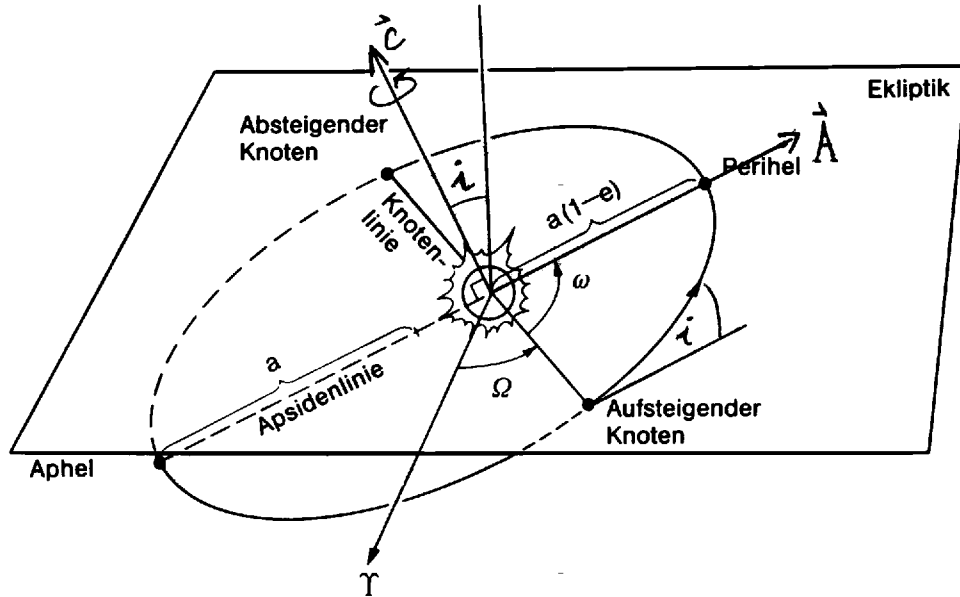


Abbildung 2: Die Festlegung der Bahnelemente

- a ... große Halbachse
- e ... Exzentrizität
- i ... Bahnneigung (Inklination)
- Ω ... Länge des aufsteigenden Knotens
- ω ... Abstand des Perihels vom aufsteigenden Knoten
- T ... Perihelzeit

In der Literatur ist häufig nur von diesen sechs notwendigen Werten die Rede. Es wird aber auch die Masse des kleineren Körpers (oder für den elliptischen Fall) die Periode (oder Umlaufzeit U) angegeben. Bei einer rein parabolischen Bahn entfällt natürlich die Angabe der Exzentrizität e - sie hat ja genau den Wert Eins. Oft wird auch statt der großen Halbachse a der Perihelabstand q angegeben, besonders wenn $e \approx 1$. Zwischen a, p und q besteht folgender Zusammenhang:

$$q = \frac{p}{1+e} \quad q = a(1-e) \quad (8)$$

Anhand der Bahngleichung (14) sehen wir, daß der Parameter der Bahn $p = C^2/\mu$ ist. Der Parameter eines Kegelschnittes ist stets $p = a|1 - e^2|$, woraus man bei bekanntem e und k die große Halbachse a erhält.

Die Orientierung der Bahn wird durch die Richtungen der beiden Vektoren \vec{C} und \vec{e} bestimmt (siehe Kapitel 3.3). Die drei Winkel i, Ω und ω enthalten die gleiche Information.

$$\vec{e} = e \begin{pmatrix} \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i \\ \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i \\ \sin \omega \sin i \end{pmatrix} \quad (9)$$

Die Inklination i gibt die Neigung der Bahn zu einer festen Bezugsebene an. Für Körper des Sonnensystems ist dies gewöhnlich die Ekliptik. Für Kometen, die sich in der üblichen Richtung,

d.h. entgegen dem Uhrzeigersinn, bewegen, liegt die Inklination im Intervall $[0^\circ, 90^\circ]$; für retrograde Bahnen liegt sie im Bereich $[90^\circ, 180^\circ]$. Ein Beispiel für eine retrograde Bahn ist der Komet Halley: Seine Inklination beträgt 162° . Somit hat seine Bahn eine Neigung von $180^\circ - 162^\circ = 18^\circ$.

Die Länge des aufsteigenden Knotens Ω gibt an, wo die Bahn die Ekliptik von Süden nach Norden schneidet. Die Bahnelemente i und Ω bestimmen die Orientierung der Bahnebene; sie stehen im Zusammenhang mit der Richtung von \vec{C} .

$$\vec{C} = C \begin{pmatrix} \sin \Omega \sin i \\ -\cos \Omega \sin i \\ \cos i \end{pmatrix} \quad (10)$$

Der Abstand des Perihels ω gibt die Richtung des Perihels an, gemessen vom aufsteigenden Knoten in Bewegungsrichtung.

e	0.995072729
q	0.914084667 AU
T	2450539.6399555 JD \equiv 1997 Apr. 1.13996
Ω	282.4707037°
ω	130.5927430°
i	89.4299101°

Tabelle 1: Die Bahnelemente von Komet 1995 O1 Hale-Bopp für die Epoche 2450520.500000 \equiv 1997 März 13.00000

3.3 Erhaltungsgrößen in der Himmelsmechanik

Die sechs Integrationskonstanten werden von verschiedenen physikalischen Größen hergeleitet. Es folgt hier eine Wiederholung, um welche Größen es sich handelt. Verwiesen sei hier vor allem auf die Vorlesung Theoretische Mechanik I.

Zu den wichtigsten Erhaltungsgrößen gehört wohl die Energieerhaltung:

$$E_{Gesamt} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + U(r) \quad (11)$$

Für ein gebundenes System (eine elliptische Bahn) ist die Gesamtenergie negativ. Für eine hyperbolische Bahn gilt $E > 0$, somit ist die kinetische Energie so groß, daß der Komet das Sonnensystem verlassen muß. Die Parabel ($E = 0$) ist der Grenzfall zwischen elliptischer und hyperbolischer Bahn, der in der Realität nicht existiert. Bei Kometen wird aber häufig diese Bahnform als erste Näherung angenommen, da die Berechnungen auf diese Weise vereinfacht werden.

Weiters ist auch der Drehimpuls¹ erhalten. Der Drehimpuls eines Kometen im heliozentrischen Koordinatensystem ist $\vec{L} = m_2\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$, wobei die folgende Form bevorzugt wird:

$$\vec{C} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \quad (12)$$

Da der Drehimpulsvektor \vec{C} immer senkrecht zur Bewegung steht, bleibt die Bahnebene zu allen Zeiten erhalten.

Um einen weiteren konstanten Vektor zu finden, bildet man $\vec{C} \times \ddot{\vec{r}}$. Da \vec{C} zeitlich unabhängig ist, läßt sich schreiben $\vec{C} \times \ddot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}(\vec{C} \times \dot{\vec{r}})$.

Durch Ausführen des Kreuzproduktes erhält man schließlich den Runge-Lenz Vektor:

¹Ich beziehe mich dabei nur auf den Bahndrehimpuls. Der Eigendrehimpuls wirkt im Allgemeinen nicht auf die Bahn.

$$\vec{A} = \dot{\vec{r}} \times \vec{C} - \frac{\mu}{|\vec{r}|} \vec{r} = \text{const} = -\mu \vec{e} \quad (13)$$

Weil \vec{C} senkrecht auf die Bahn steht, muß $\dot{\vec{r}} \times \vec{C}$ in der Bahnebene liegen. Durch Linearkombination mit dem Vektor $-\frac{\mu}{|\vec{r}|} \vec{r}$, der auch in der Bahnebene liegt, wird auch \vec{A} in der Bahnebene sein. \vec{A} zeigt in die Richtung vom Perihel. Das ist der Punkt, in dem der Komet der Sonne am nächsten kommt.

Wir haben also zwei konstante Vektoren \vec{C} und \vec{A} gefunden, die linear unabhängig sind, es gilt also $\vec{C} \cdot \vec{A} = 0$. Diese beiden Vektoren beschreiben vollständig Größe, Form und Orientierung der Bahn. Was uns noch fehlt ist eine Information über die zeitliche Bewegung auf der Bahn. Wir wollen ja wissen, wo wir den Komet an einem bestimmten Tag finden können. Dazu legen wir einen bestimmten Radiusvektor $\vec{r}(T)$ fest, und berechnen Datum und Uhrzeit für wann dieser Punkt erreicht ist. Üblicherweise zeigt $\vec{r}(T)$ zum Punkt der Perihelpassage und T wird als die Perihelzeit bezeichnet. Mehr über die Bestimmung der Perihelzeit findet man im Abschnitt 3.6: Positionen in der Bahn.

3.4 Das erste Keplersche Gesetz (Die Bahngleichung)

Um die geometrische Form der Bahn zu finden, benutzen wir den Runge-Lenz Vektor $\vec{A} \propto \vec{e}$ aus (13) als Bezugsrichtung. Den Winkel zwischen \vec{r} und \vec{e} nennen wir die wahre Anomalie.

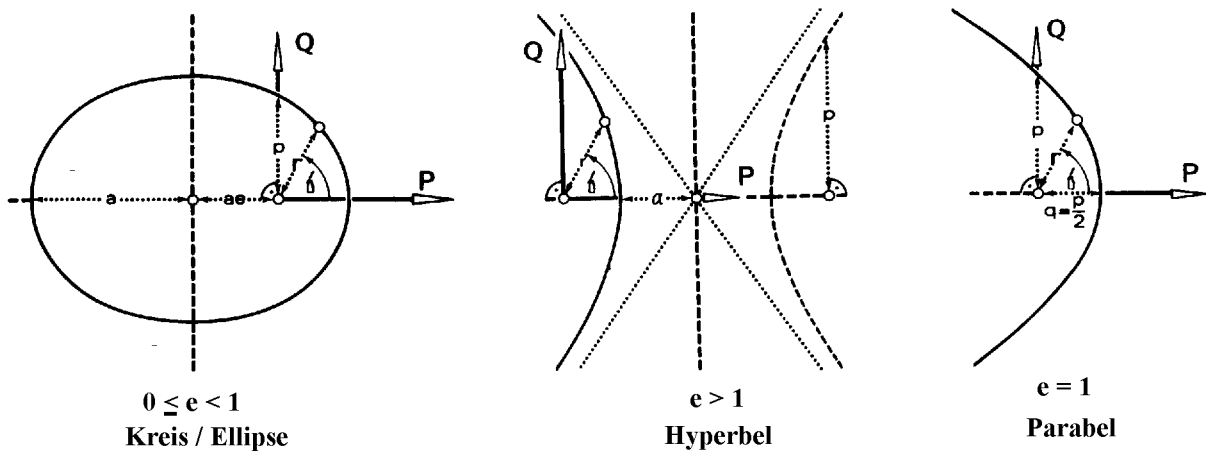


Abbildung 3: Darstellung des Radiusvektors \vec{r} und der exzentrischen Anomalie f für verschiedene Kegelschnitte

Wenn wir Gleichung (13) auf beiden Seiten skalar mit \vec{r} multiplizieren, dann können wir eine Seite mit $\vec{r} \cdot \vec{e} = r e \cos f$ ausschreiben. Den Winkel zwischen \vec{r} und \vec{e} nennen wir die wahre Anomalie. Es ist nichts falsch oder anomal an dieser Anomalie. Die vom Perihel ausgemessenen Winkel werden wahrscheinlich aus historischen Gründen so genannt. Es ergibt sich damit

$$r = \frac{C^2/\mu}{1 + \frac{|\vec{A}|}{\mu} \cos f} = \frac{p}{1 + e \cos f} \quad (14)$$

Das ist die allgemeine Gleichung für die Kegelschnitte in Polarform, wobei $e = |\vec{e}|$ ist. Es sind für e folgende Bahnformen möglich:

$e = 0$	Kreisbahn,	$0 < e < 1$	Ellipse,
$e = 1$	Parabel,	$e > 1$	Hyperbel,

wobei die Kreis- und Parabelbahn in der Natur praktisch nur näherungsweise vorkommen. Außer der Kreisbahn gibt es noch einen weiteren Spezialfall, der oft vergessen wird: der geradlinige Fall (Sturz in die Sonne). Man muß diese Bahnen deshalb als einen theoretischen Spezialfall behandeln, da jede noch so kleine Störung die Bahn in eine Ellipse bzw. Hyperbel verwandeln würde. Ob man bei der geradlinigen Bahn von einer entarteten Ellipse, Parabel oder Hyperbel spricht, hängt von der Energie des Körpers ab. Man erhält die Gerade aus dem entsprechenden Kegelschnitt, wenn man die kleinere Halbachse bzw. den Bahnparameter gegen Null gehen läßt. Die Exzentrizität nimmt dabei in allen Fällen den Wert Eins an.

Wir haben also ohne größeren Aufwand gezeigt, daß das erste Keplersche Gesetz gilt und daß auch andere Kegelschnitte möglich sind.

Kepler I

Die Bahn eines Planeten ist eine Ellipse, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

3.5 Das zweite und dritte Keplersche Gesetz

Wir haben gefunden, daß der Drehimpulsvektor $\vec{C} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ konstant ist. Also ist auch $\frac{|\vec{r} \times \dot{\vec{r}}|}{2}$ eine Konstante, die wir $\dot{\mathcal{A}}$ nennen (nicht zu verwechseln mit dem Runge-Lenz Vektor \vec{A}). Daraus werden wir nun den Flächensatz herleiten. Stellen wir uns geometrisch die im Zeitintervall Δt überstrichene Fläche vor (siehe Abbildung 4):

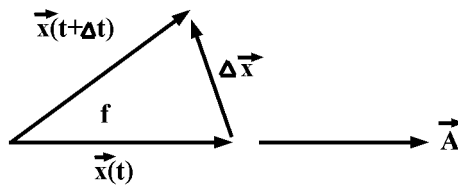


Abbildung 4: Die vom Vektor \vec{x} in der Zeit Δt überstrichene Fläche

Es gilt $\Delta\Omega = \frac{1}{2} \vec{x} \times \Delta\vec{x}$.

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\Omega}{\Delta t} = \frac{1}{2} \vec{x} \times \vec{v} = \frac{\vec{C}}{2} = \text{const.} \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{2} r \vec{e}_r \times (r \dot{\vec{e}}_r + r f \vec{e}_\phi) = \frac{1}{2} r^2 f \vec{e}_z \end{aligned}$$

Wir haben also das zweite Keplersche Gesetz erhalten:

Kepler II

Der Leitstrahl zwischen Sonne und Planet überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

oder

$$\dot{\mathcal{A}} = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \dot{\vec{r}}| = \frac{|\vec{C}|}{2} \quad (15)$$

Wenn wir nun Gleichung (15) über eine volle Periode integrieren und die Fläche der Ellipse $\pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2}$ einsetzen, dann erhalten wir $\pi a^2 \sqrt{1 - e^2} = \frac{1}{2} C P$

Wenn wir nun die Energie als Funktion der Halbachse einsetzen, erhalten wir schlußendlich

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu} = \text{const.} \quad (16)$$

oder in Worten das dritte Keplersche Gesetz:

Kepler III

Das Verhältnis des Quadrats der Umlaufzeit eines Planeten zu der dritten Potenz der Halbachse ist konstant.

Dies ist sehr nützlich, um die Entfernungen zwischen den Körpern zu bestimmen, wenn die Umlaufzeit beobachtet wurde.

Natürlich gibt es noch weitere Sätze, zum Beispiel den Virialsatz ($\langle T \rangle = -\frac{1}{2}\langle U \rangle$), den wir hier aber nicht weiter besprechen wollen.

3.6 Die Position in der Bahn

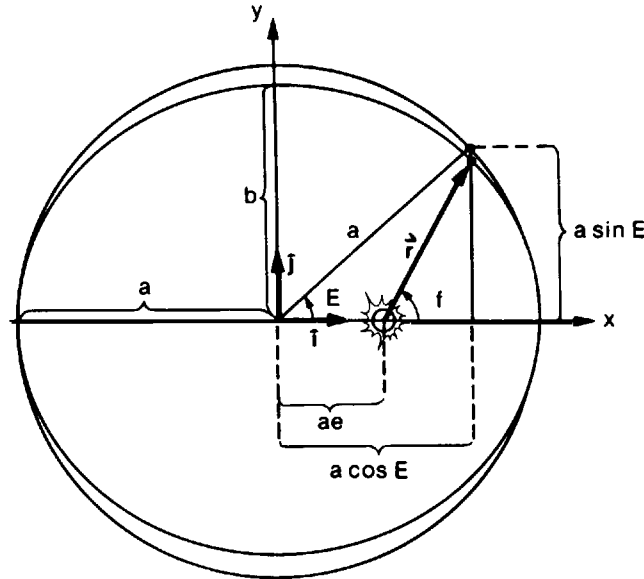


Abbildung 5: Die Definition der exzentrischen Anomalie E . \vec{r} ist der Radiusvektor des Planeten

Wir kennen jetzt die Geometrie der Bahn, wissen aber nicht, wo sich der Komet zu bestimmten Zeitpunkten befindet. Die folgenden Überlegungen gelten nur für den Fall der Ellipse. Für die anderen Kegelschnitte wird nur das Ergebnis dargestellt.

Führen wir nun einen neuen Winkel E ein, die sogenannte *exzentrische Anomalie* (siehe Abbildung 5). Somit können wir den Radiusvektor mittels E folgendermaßen darstellen:

$$\vec{r} = a(\cos E - e)\vec{i} + b \sin E \vec{j} \quad (17)$$

Aus der Vektorgleichung (17) können wir die Entfernung von der Sonne erhalten:

$$r = a(1 - e \cos E) \quad (18)$$

Differenziert man nun die Kegelschnittgleichung (14) und obige Gleichung (18) nach ihren zeitlich Veränderlichen, so bekommt man

$$dr = \frac{pe \sin f}{(1 - e \cos f)^2} df = r^2 \frac{e}{p} \sin f df \quad (19)$$

$$dr = ae \sin E dE \quad (20)$$

Folgende Beziehung ist zu setzen:

$$r^2 df = C dt = \frac{2\pi}{U} \frac{ap}{\sqrt{1-e^2}} dt \quad (21)$$

Die erste Beziehung folgt aus dem Flächensatz, die zweite können wir über $|\vec{C}| = \frac{2\pi}{U} ab$ und die geometrischen Ellipsenbeziehungen

$$a = \frac{p}{1-e^2} \quad b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} \quad (22)$$

$$p = \frac{b^2}{a} \quad e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad (23)$$

finden. Setzen wir nun die Beziehung (21) in die Gleichung (19) ein, so erhält man:

$$dr = \frac{2\pi}{U} \frac{ae}{\sqrt{1-e^2}} \sin f dt \quad . \quad (24)$$

Vergleicht man (19) und (20) miteinander, so folgt:

$$\sqrt{1-e^2} \frac{\sin E}{\sin f} dE = \frac{2\pi}{U} dt \quad (25)$$

und weiters, da $r \sin f = a\sqrt{1-e^2} \sin E$ zusammen mit Gleichung (18):

$$\frac{r}{a} dE = (1 - e \cos E) dE = \frac{2\pi}{U} dt \quad (26)$$

Die Integration von (26) liefert nun die wichtige Keplergleichung:

$$E - e \sin E = \frac{2\pi}{U} (t - T) = M \quad (27)$$

Die transzendente Keplergleichung gibt die exzentrische Anomalie als Funktion der seit dem Zeitpunkt T des letzten Periheldurchgangs verfloßenen Zeit. Um noch eine Anomalie einzuführen, wird M als die *mittlere Anomalie* eines Himmelskörpers bezeichnet.

Da (27) nicht auf analytischem Wege nach E aufgelöst werden kann, muß für die Berechnung der exzentrischen Anomalie E ein Iterationsverfahren angewandt werden. Man kann dazu die Formel

$$E_{n+1} = M + e \sin E_n \quad (28)$$

verwenden. Diese kann für kleine $\sin E$ und bei großem e ziemlich langsam konvertieren. Es sind natürlich auch andere Methoden wie Reihenentwicklungen oder das Newtonsche Näherungsverfahren möglich:

$$E_{n+1} = E_n - \frac{f(E_n)}{f'(E_n)} \quad \rightarrow \quad E_{n+1} = E_n - \frac{E_n - e \sin E_n + M}{1 - e \cos E_n} \quad (29)$$

Wenn E bestimmt wurde, muß wieder die Beziehung zur wahren Anomalie f hergestellt werden:

$$\tan \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{f}{2} \quad (30)$$

Diese Gleichungen gelten nur für den Fall $e < 1$, also einer Ellipse. Für die Hyperbel und den Spezialfall einer Parabel gelten ähnliche Überlegungen.

Im Fall einer Hyperbel führt man den Hilfswinkel H ein, die *hyperbolisch-exzentrische Anomalie*. Es gilt:

$$\tan \frac{H}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{f}{2} \quad (31)$$

$$r \cos f = a(e - \cosh H) \quad (32)$$

$$e \sinh H - H = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t - T) = M_h \quad (33)$$

Für die Iteration verwendet man unter anderem das Newtonsche Näherungsverfahren:

$$H_{n+1} = H_n - \frac{e \sinh H_n - H_n - M_h}{e \cosh H_n - 1} \quad (34)$$

Bei der Parabelbahn nimmt die Keplersche Gleichung eine einfachere Form an, für die keine Hilfswinkel definiert werden müssen:

$$\tan \frac{f}{2} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{\mu}{2q^3}}(t - T) \quad (35)$$

Diese Gleichung kann man direkt auflösen:

Mit

$$a = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\mu}{2q^3}}(t - T) \quad (36)$$

gilt

$$\tan \frac{f}{2} = B - \frac{1}{B} \quad \text{mit } B = \sqrt[3]{\sqrt{A^2 + 1} + A} \quad (37)$$

und für $A \neq 0$

$$\tan \frac{f}{2} = \pm \frac{2}{\tan\{2 \arctan[\sqrt[3]{\tan(\frac{1}{2} \arctan \frac{1}{|A|})}]\}} \quad (\pm \text{ für sign}(A)) \quad (38)$$

Aus der nunmehr bekannten wahren Anomalie folgt dann über die allgemeine Kegelschnittgleichung (14) die Entfernung von der Sonne:

$$r = \frac{2q}{1 + \cos f} \quad (39)$$

4 Reduktion der Ausgangsdaten

4.1 Einige zielführende Überlegungen

Um die Auswirkungen von Beobachtungsfehlern zu verringern, ist man bestrebt einen möglichst großen heliozentrischen Bogen für die Ableitung der Elemente zu verwenden. Bei vollkommen unbekanntem Bahnen ist natürlich nichts über die Größe dieses Bogens bekannt. Einen Anhalt liefern aber die Zwischenzeiten. Bei Planetoiden, deren heliozentrische Bewegung nicht sehr von einer Ellipse mit kleiner Exzentrizität abweicht, sollte eine Berechnung erst erfolgen, wenn die Zwischenzeiten mindestens sechs Tage betragen. Bei kleineren Zwischenzeiten sind die Fehler durch eine Kreisbahnbestimmung nicht viel größer. Erfahrungsgemäß sind die Elemente, die von einem Zeitraum von mehr als sechs bis acht Wochen Beobachtung stammen, ausreichend zum Wiederauffinden in den nächsten Erscheinungen.

Bei den stark exzentrischen Bahnen der Kometen, die meist in der Nähe der Perihelie entdeckt werden, ist die Bewegung sehr viel größer. Hier erhält man schon aus etwa zwei Tagen Zwischenzeit eine zur Verfolgung ausreichende Vorraberechnung. Bei Kometen sind viele Beobachtungsdaten sehr wichtig, um die Wiederentdeckung von periodischen Kometen zu gewährleisten.

Für alle Methoden der Bahnbestimmung gibt es einige Ausnahmefälle, für die dann drei Beobachtungen nicht ausreichen. Zum Beispiel kann es zum Problem werden, wenn der Komet eine Schleife beschrieben hat und der erste und zweite Beobachtungsort zusammenfallen. Ein wichtiger Ausnahmefall ist auch, wenn die Bahnebene mit der Ekliptik zusammen fällt. In der Praxis tritt dieser Fall natürlich nur näherungsweise auf. Bei den meisten Methoden versagt hier die Bestimmung der Bahn aus drei Beobachtungen gänzlich. Wenn man doch ein Ergebnis erhält, so kann dieses oft angezweifelt werden. Eine Ausnahme in dieser Hinsicht ist wohl die Methode von Neusch [13], die ich später für die allgemeine Bahnbestimmung verwenden werde.

Als allgemeine Richtlinie gilt aber immer, daß man auf möglichst große Zwischenzeiten und möglichst verschiedene Ausgangselemente Wert legen sollte.

Die Resultate der Beobachtungen werden auf 0.01^s in Rektaszension und $0.1''$ in Deklination angegeben. Dementsprechend wird vielfach die Bahnrechnung mit einer Genauigkeit von sieben Stellen empfohlen. Auch wenn man erwarten darf, daß die Beobachtungen auf wenige Zehntelsekunden exakt sind, so sollte man nicht die Genauigkeit der Rechnung auf mehr als 0.1 Bogensekunden ansetzen. Es ist zu bedenken, daß die üblichen Beobachtungsfehler den zehnfachen Betrag ausmachen. Übertriebene Genauigkeit ist umso weniger gefordert, als daß es sich bei der Keplerschen Bewegung ja nur um eine erste Näherung handelt.

Mit den durchschnittlichen Beobachtungsfehlern kann man sich bei elliptischer Bahnbestimmung (langsam bewegte Planetoiden) mit der sechsstelligen Rechnung (Winkel auf 0.1 Bogensekunden oder 0.00001 Grad) begnügen. Bei sich rasch bewegendem Kometen, bei denen Beobachtungsfehler ohnehin größer sind, genügt für die erste Bahnbestimmung manchmal die fünfstellige Rechnung.

4.2 Datenreduktion

Die unmittelbar beobachteten Daten bedürfen einer entsprechenden Reduktion, bevor sie als Grundlage der Bahnbestimmung Verwendung finden. So erfahren die Visiereinrichtung und die Koordinatensysteme Veränderungen, die unter folgenden Begriffen bekannt sind:

- Refraktion
- Parallaxe
- Aberration
- Nutation und Präzession

Weiters sind auch die Beobachtungszeiten, die oft von verschiedenen Orten auf der Erde zusammenlaufen, auf einen einheitlichen Meridian zu bringen.

4.2.1 Die Beobachtungszeit

Die Beobachtungszeit wird durch Anbringen der Längendifferenz (4 min. pro Längengrad) zwischen dem Beobachtungsort und Greenwich auf UT umgerechnet. Bemerkung: Bis zum Jahr 1915 war der Meridian durch Berlin der fundamentale Meridian, auf den sich alle Angaben bezogen.

4.2.2 Die Refraktion

Die Refraktion ist die Richtungsänderung der Lichtstrahlen, wenn diese von einem Medium in ein anderes übergehen. In der Astronomie ist das die Ablenkung in der Erdatmosphäre in Abhängigkeit von der Zenitdistanz. Die Refraktion ist kein konstanter Faktor, sondern stark abhängig von der Witterung, der Luftfeuchtigkeit, der Temperatur und vieles mehr. Daher läßt sich auch kein exaktes Gesetz aufstellen.

Neben der Möglichkeit, in Refraktionstabellen nachzusehen, kann man sich auch mit folgender Näherungsformel behelfen:

$$R[\prime] = \tan z_b \quad z = z_b + R \quad (40)$$

$R[\prime]$... Refraktion in Minuten
 z_b ... beobachtete Zenitdistanz
 z ... wahre Zenitdistanz

4.2.3 Die Parallaxe

Die Parallaxe entsteht durch die Bewegung der Erde. Die Ortsveränderung der Beobachtung ruft eine Verschiebung im Ort des Himmelskörpers hervor. Um Beobachtungen eines Körpers von verschiedenen Standpunkten aus, die durch die Erdbewegung entstanden sind, zu kombinieren, muß man den parallaktischen Effekt eliminieren.

Die Bewegung des irdischen Beobachters ist das Resultat aus drei Einzelbewegungen: der täglichen (die Erdrotation), der jährlichen (Umlauf um die Sonne) und der sekulären Bewegung (Bewegung des Sonnensystems). Die sekuläre Parallaxe betrifft das Sonnensystem als Ganzes, das heißt, wir brauchen sie nicht für Körper bezüglich unseres Systems zu beachten. Die jährliche Parallaxe wird durch die Transformation von geozentrischen in heliozentrische Koordinaten bereits berücksichtigt. Die tägliche Parallaxe wird durch die Übertragung der topozenitrischen in heliozentrische Koordinaten eliminiert. Dazu ist aber die geozentrische Entfernung des Körpers wichtig. Nun kann man aber auf die Ekliptik aufgebaute Methoden benutzen. So bringt das Verschwinden der z -Koordinate der Sonne Z_\odot bzw. die geringe Sonnenbreite $B_\odot (< 1'')$ Vorteile für das Verfahren der Parallaxenreduktion.

Gauß hat eine Methode aufgestellt, die auch bei unbekannter Entfernung die Parallaxe und gleichzeitig die Sonnenbreite beseitigt. Für besonders erdnahe Beobachtungen führt Gauß den sogenannten *locus fictus* ein, also einen fingierten Beobachtungspunkt F der an die Stelle des Beobachtungsortes O tritt. Der *locus fictus* ist der Schnittpunkt der Verbindungslinie von O zum Körper P mit der Ekliptik. Der Punkt F hat die Eigenschaften, daß seine Breite gleich null und die Richtung zum Körper P die gleiche ist. Für die genaue Berechnung mit dem *locus fictus* siehe [22] und [2], Seite 103.

Bei den Kometen, die der Erde oft näher kommen, ist der Einfluß der Parallaxe im allgemeinen größer als bei Planetoiden. Doch werden diese Momente durch die erheblich größere Ungenauigkeit der Kometenbeobachtung ausgeglichen. Für eine erste Bahnbestimmung von Kometen kann die Parallaxenreduktion ohne Sorge vernachlässigt werden.

4.2.4 Die Aberration

Die Aberration entsteht durch die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes. Diese bewirkt die folgenden zwei Effekte: die Fixsternaberration und die Aberrationszeit.

Unter der Fixsternaberration versteht man die infolge der Bewegung der Erde verursachte, scheinbare Verschiebung des Körpers in Richtung der Bewegung. Die Aberrationszeit gibt die Zeitdifferenz von der Aussendung des Lichts vom Körper bis zum Empfang auf der Erde an. Der Himmelskörper hat sich in dieser Zeit natürlich weiterbewegt.

Die Fixsternaberration wird, wie die Parallaxe, in tägliche, jährliche und sekuläre Aberration eingeteilt. Für die sekuläre Aberration müßte man nur einen Konstanten Wert für alle Körper im Sonnensystem addieren – es ergibt sich dadurch also keine Änderung. Verglichen mit der jährlichen Aberration ist die tägliche Aberration von Natur aus geringfügig und mit

$$\alpha = 0.32'' \cos \phi \quad (41)$$

nur von der geographischen Breite ϕ des Beobachters abhängig und somit als Instrumentenfehler leicht zu berechnen.

Die jährliche Aberration schwankt durch die jährliche Bewegung der Erde zwischen einem maximalen und minimalen Wert. Bezeichnet man mit α_{app} bzw. δ_{app} den beobachteten scheinbaren Ort,

mit α_{vera} bzw δ_{vera} den wahren Ort und mit L_{\odot} die Länge der Sonne, dann lautet die Reduktionsformel für die Fixsternaberration in erster Näherung: (ϵ ...Schiefe der Ekliptik)

$$\alpha_{vera} - \alpha_{app} = 20.47''(\sin \alpha \sin L_{\odot} + \cos \alpha \cos L_{\odot} \cos \epsilon) \sec \delta \quad (42)$$

$$\delta_{vera} - \delta_{app} = 20.47''\{\cos \alpha \sin L_{\odot} \sin \delta - (\sin \alpha \sin \delta \cos \epsilon - \cos \delta \sin \epsilon) \cos L_{\odot}\} \quad (43)$$

Die Aberrationszeit ist ähnlich wie die Parallaxe von der geozentrischen Entfernung abhängig. Für die Praxis ist das folgende Verfahren das zweckmäßigste: Bei neu entdeckten Planetoiden oder Kometen wird die Entfernung und damit die Aberrationszeit erst im Verlaufe der Bahnbestimmung bekannt. Aus dem zur Zeit t gemessenen scheinbaren Ort erhält man den zur Zeit t_0 gehörigen wahren Ort, indem man vom scheinbaren Ort die Fixsternaberration abzieht und dazu den zur Zeit t gehörigen Erdort benutzt. Danach führt man die Bahnrechnung mit der reduzierten Zeit t_0 fort. Somit erhält man die Bahnelemente unter der vollen Berücksichtigung der Aberration.

4.2.5 Die Präzession und Nutation

Die Erdachse und die Ekliptik erfahren im Laufe der Zeit Veränderungen durch die Anziehung von Mond, Sonne und Planeten. Die periodischen Schwankungen der Erdbahn werden dadurch berücksichtigt, indem man der Sonne eine der Zeit entsprechende Breite zuordnet. Bei den äquatorialen Koordinaten ändert sich nur der Frühlingspunkt - der Schnittpunkt von Himmelsäquator und Ekliptik, der im Sternbild Widder steht, verschiebt sich. Der Ausgangspunkt der Zählung der Rektaszension ist davon betroffen.

Die Erdachse führt unter dem Einfluß von Sonne und Mond die Präzessions- und Nutationsbewegung aus. Die Präzession bewirkt eine fortschreitende Bewegung des Frühlingspunktes, die als Präzession der Äquinoktien bezeichnet wird. Die Nutation ruft eine unregelmäßige Schwankung des Frühlingspunktes und der Schiefe der Ekliptik hervor.

Durch all diese Verlagerungen verlangen alle Koordinatenangaben, die sich auf diese Fundamentalebene beziehen, eine zusätzliche Angabe, nämlich auf welches Äquinoktium sie sich beziehen. Falls Beobachtungen von verschiedenen Erscheinungen zur Bahnberechnung herangezogen werden, müssen alle Angaben auf ein gemeinsames Äquinoktium umgerechnet werden.

Man wird sich also auf eine Epoche einigen müssen, die zweckmäßiger Weise dieselbe ist wie die in den Jahrbüchern angegebene. Wenn die Beobachtungen über einen sehr großen Zeitraum verstreut sind, dann ist ein mittleres Äquinoktium zu berechnen, auf das alle Daten umzurechnen sind. Die oben mit den Gleichungen (42) und (43) gegebene Definition des wahren Ortes bedarf also einer Erweiterung. Bezeichnet man mit α_{vera} und δ_{vera} die wahren Koordinaten, mit α_{med} und δ_{med} den Ort für das mittlere Äquinoktium, so ist die Reduktion durch die Formeln

$$\alpha_{med} - \alpha_{vera} = -f - \frac{1}{15}g \sin(G + \alpha) \tan \delta \quad (44)$$

$$\delta_{med} - \delta_{vera} = -g \cos(G + \alpha) \quad (45)$$

gegeben. Die der Präzession und Nutation entstammenden Größen sind in den Jahrbüchern zu finden. Weitere Informationen zu Präzession und Nutation findet man unter [2] und [22].

5 Eine einfache Methode der Bahnbestimmung

Nach einer Gegenüberstellung von einigen Methoden habe ich mich aus folgenden Gründen für die Methode von W. Neusch [13] aus dem Jahre 1981 entschieden:

Im wesentlichen werden bei den älteren Methoden drei Meßwerte ausgewählt, und daraus wird eine Bahn berechnet. Mit den weiteren Beobachtungen wird die Bahn mit Verbesserungsmethoden genauer bestimmt. Dadurch ist die vorläufige Bahn stark von der Wahl der drei Beobachtungen

abhängig. Im Gegensatz dazu können bei der Methode von Neusch alle Beobachtungen ($N \geq 3$) in die Bahnberechnung einfließen. Meines Wissens ist das die einzige Methode, bei der das möglich ist.

Grob gesehen ist die Neusch'sche Methode eine Iteration mit einem linearen Gleichungssystem und dadurch leicht in ein Rechnerprogramm umzuwandeln. Beim händischen Rechnen wird die Methode allerdings durch die größere Zahl der Zwischenschritte etwas schwerfälliger. Die älteren Methoden sind auf logarithmisches Rechnen zugeschnitten und haben im allgemeinen weniger Schritte. Der Nachteil logarithmischer Methoden liegt darin, daß sie schwerer auf einen Computer zugeschnitten werden können.

Außerdem müssen bei der Neusch'schen Methode durch das Verwenden von Positions- und Geschwindigkeitsvektoren keine Spezialfälle wie geringe Inklination oder kleine Exzentrizität beachtet werden. Ältere Methoden bauen auf den klassischen Bahnelementen $(a, e, i, \Omega, \omega, T)$ auf, die nicht immer stetige Funktionen von Position und Geschwindigkeit sind. Hier müssen also Unterschiede in der Berechnung gemacht werden.

5.1 Notation und Voraussetzungen

Neusch hat seine Methode hauptsächlich entwickelt, um Spezialfälle zu vermeiden, und verwendet deshalb kartesische Koordinaten. Wir müssen jetzt also das Problem der Bahnbestimmung in kartesischen Koordinaten formulieren.

Ein Himmelskörper bewegt sich bekanntlich unter der Schwerkraft der Sonne. In anderen Worten das Newtonsche Gesetz lautet:

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} \quad \text{wobei} \quad \mu = G(m_1 + m_2) \quad (46)$$

Diese und die weiteren Gleichungen kennen wir schon von Kapitel 3.1 und Kapitel 3.3:

Der Drehimpulsvektor:

$$\vec{C} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \quad (47)$$

Der Runge-Lenz Vektor:

$$\vec{A} = \dot{\vec{r}} \times \vec{C} - \frac{\mu}{r} \vec{r} = \text{const} = -\mu \vec{e} \quad (48)$$

Die Gleichungen (47) und (48) bestimmen die Bahnebene bzw. die Richtung zum Perihel, mit Ausnahme der Perihel-Durchgangszeit T . Weiters gilt $\vec{C} \cdot \vec{A} = 0$, da beide Vektoren orthogonal aufeinander stehen.

Bezeichnen wir nun $\vec{a} := \vec{r}_1(t_1)$ und $\vec{b} := \dot{\vec{r}}_1(t_1)$ als den Richtungs- bzw. Geschwindigkeitsvektor zum Zeitpunkt t_1 sowie $\vec{a}^* := \vec{r}_2(t_2)$ und $\vec{b}^* := \dot{\vec{r}}_2(t_2)$ für den Zeitpunkt $t^* := t_2$.

Da $\vec{r}(t)$ und $\dot{\vec{r}}(t) \quad \forall t$ linear unabhängig ist, kann man jeden anderen Vektor (speziell \vec{a}^* und \vec{b}^*) durch Linearkombination mit \vec{a} und \vec{b} darstellen:

$$\vec{a}^* = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} \quad \vec{b}^* = \gamma \vec{a} + \delta \vec{b} \quad (49)$$

Und natürlich können wir auch umgekehrt schreiben:

$$\vec{a} = \alpha^* \vec{a}^* + \beta^* \vec{b}^* \quad \vec{b} = \gamma^* \vec{a}^* + \delta^* \vec{b}^* \quad (50)$$

Um \vec{a}^* und \vec{b}^* aus \vec{a} und \vec{b} und umgekehrt bestimmen zu können, müssen wir nur $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bzw. $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*, \delta^*$ als Funktionen von \vec{a}, \vec{b} und $t - t^*$ wissen.

Dazu müssen wir zuerst den Wert für den Drehimpuls \vec{C} und die Exzentrizität e bestimmen, gegeben durch:

$$C = |\vec{C}| \quad e = \frac{|\vec{A}|}{\mu} \quad (51)$$

Weiters benötigen wir die Anomalie $f(t)$ bzw $f^*(t^*)$ für die entsprechenden Zeitpunkte. Diese können wir aus der Keplergleichung für die jeweiligen Kegelschnitte bestimmen. Dabei müssen wir die Verfahren anwenden, wie sie in Abschnitt 3.6 angegeben wurden.

Für den elliptischen Fall wäre das Gleichung (27), also:

$$E - e \sin E = \frac{|\vec{C}|}{ab} (t - T) = M \quad (52)$$

Die Parameter a, b kann man mit $|\vec{C}| = \sqrt{\mu p}$ und den Gleichungen (27) und (22) bestimmen. Haben wir nun E über ein passendes Iterationsverfahren erhalten, ist es uns möglich, mit folgender Formel die Anomalien f und f^* zu berechnen:

$$\tan \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{f}{2} \quad (53)$$

Da wir nun C, e, f und f^* kennen, brauchen wir noch den Zusammenhang von diesen Bahnelementen mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ berechnen.

Aus der Definition von (49) bzw. (50) erhalten wir:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t^*} = \gamma \quad \frac{\partial \beta}{\partial t^*} = \delta \quad (54)$$

Wenn wir nun $\Delta := f^* - f$ setzen und $\vec{C}(\vec{a} \times \vec{a}^*)$ berechnen, erhalten wir einerseits

$$\vec{C}(\vec{a} \times \vec{a}^*) = |\vec{C}| |\vec{a}| |\vec{a}^*| \cos \Delta \quad (55)$$

und andererseits

$$\vec{C}(\vec{a} \times \vec{a}^*) = \vec{C}(\vec{a} \times (\alpha \vec{a} + \beta \vec{b})) = \beta \vec{C} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \beta C^2 \quad (56)$$

Wir haben also erhalten, daß

$$\beta = \frac{1}{C} |\vec{a}| |\vec{a}^*| \sin \Delta \quad (57)$$

ist, mit der Kegelschnittgleichung (14)

$$\vec{a} = \vec{r}(t) = \frac{C^2}{\mu} (1 + e \cos f)^{-1} \quad (58)$$

erhalten wir β und mit (54) α :

$$\beta = \frac{C^3}{\mu^2} \frac{\sin \Delta}{(1 + e \cos f)(1 + e \cos f^*)} \quad (59)$$

$$\alpha = 1 + \frac{\cos \Delta - 1}{1 + e \cos f^*} \quad (60)$$

5.2 Die Bahnbestimmung

Wir haben nun die Vorbereitungen für die Bahnbestimmung getroffen. Die folgenden Daten wurden uns durch die i -te ($1 \geq i \geq N$) Beobachtung zu Verfügung gestellt:

- Zeit der Messung t_i

- Positionsvektor des Beobachters relativ zur Sonne: $\vec{E}_i = \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix}$

- Richtungsvektor Erde-Komet, gegeben durch den Einheitsvektor $\vec{e}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$
- Gewicht p_i der Beobachtung

Definieren wir eine mittlere, gewichtete Epoche t_0

$$t_0 = \frac{\sum_{i=1}^N p_i t_i}{\sum_{i=1}^N p_i} \quad (61)$$

und die entsprechenden Richtungs- bzw. Geschwindigkeitsvektoren zur Zeit t_0 $\vec{a} := \vec{r}(t_0)$, $\vec{b} := \dot{\vec{r}}(t_0)$ so gilt:

$$\vec{r}_i = \alpha_i \vec{a} + \beta_i \vec{b} \quad (62)$$

und wenn wir mit d_i die Entfernung des Kometen von der Erde zur Zeit t_i definieren, so erhalten wir für \vec{r}_i :

$$\vec{r}_i = \vec{E}_i + d_i \vec{e}_i \quad (63)$$

Verbinden wir nun Gleichung (62) und (63), so erhält man:

$$\alpha_i \vec{a} + \beta_i \vec{b} - d_i \vec{e}_i = \vec{E}_i \quad (64)$$

Gleichung (64) können wir auch anders anschreiben:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \mathbf{1} & \beta_1 \mathbf{1} & -\vec{e}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \alpha_2 \mathbf{1} & \beta_2 \mathbf{1} & \mathbf{0} & -\vec{e}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_N \mathbf{1} & \beta_N \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & -\vec{e}_N \end{pmatrix}}_{=\mathbf{A}} \begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \\ d_1 \\ \vdots \\ d_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{E}_1 \\ \vec{E}_2 \\ \vdots \\ \vec{E}_N \end{pmatrix} \quad (65)$$

mit $\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Multiplizieren wir nun Gleichung (65) von links mit der Gewichtsfunktion $\text{diag}(p_1, p_1, p_1; p_2, p_2, p_2; \dots; p_N, p_N, p_N)$ und mit \mathbf{A}^T von oben, so bekommen wir:

$$\begin{pmatrix} \sum p_i \alpha_i^2 \mathbf{1} & \sum p_i \alpha_i \beta_i \mathbf{1} & -p_1 \alpha_1 \vec{e}_1 & \dots & \dots & -p_N \alpha_N \vec{e}_N \\ \sum p_i \alpha_i \beta_i \mathbf{1} & \sum p_i \beta_i^2 \mathbf{1} & -p_1 \beta_1 \vec{e}_1 & \dots & \dots & -p_N \beta_N \vec{e}_N \\ -p_1 \alpha_1 \vec{e}_1^T & -p_1 \beta_1 \vec{e}_1^T & p_1 & 0 & \dots & 0 \\ -p_2 \alpha_2 \vec{e}_2^T & -p_2 \beta_2 \vec{e}_2^T & 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -p_N \alpha_N \vec{e}_N^T & -p_N \beta_N \vec{e}_N^T & 0 & 0 & \dots & p_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum p_i \alpha_i \vec{E}_i \\ \sum p_i \beta_i \vec{E}_i \\ -p_1 \vec{E}_1^T \vec{e}_1 \\ -p_2 \vec{E}_2^T \vec{e}_2 \\ \vdots \\ -p_N \vec{E}_N^T \vec{e}_N \end{pmatrix} \quad (66)$$

Der Summationsindex i geht dabei immer von 1 bis N . Wenn wir nun die Matrix F_i definieren

$$\mathbf{F}_i := \vec{e}_i \vec{e}_i^T - \mathbf{1} = \begin{pmatrix} x_i^2 - 1 & x_i y_i & x_i z_i \\ x_i y_i & y_i^2 - 1 & y_i z_i \\ x_i z_i & y_i z_i & z_i^2 - 1 \end{pmatrix} \quad (67)$$

und Gleichung (66) von links damit multiplizieren, so reduziert sich das System (66) auf sechs Gleichungen für $a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3$. Wir erhalten also:

$$\begin{pmatrix} \sum p_i \alpha_i^2 \mathbf{F}_i & \sum p_i \alpha_i \beta_i \mathbf{F}_i \\ \sum p_i \alpha_i \beta_i \mathbf{F}_i & \sum p_i \beta_i^2 \mathbf{F}_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum p_i \alpha_i \mathbf{F}_i \vec{E}_i \\ \sum p_i \beta_i \mathbf{F}_i \vec{E}_i \end{pmatrix} \quad (68)$$

Jetzt ist im Prinzip nur noch dieses Gleichungssystem zu lösen. Da wir aber α_i, β_i sowie \vec{a} und \vec{b} nicht kennen, müssen wir ein Iterationsverfahren anwenden.

1. Wir nehmen also die α_i und β_i an,
2. lösen das Gleichungssystem, in dem wir die (6×6) -Matrix invertieren und dadurch unsere Vektoren $\vec{a} \equiv \vec{r}(t_0)$ und $\vec{b} \equiv \dot{\vec{r}}(t_0)$ erhalten.

3. Mit der Gleichung

$$d_i = |\vec{r}_i - \vec{E}_i| \quad (69)$$

können wir den Abstand des Körpers zu Erde berechnen. Hier lassen wir gleich die Aberrationszeit einfließen. Wir rechnen also jetzt nicht mehr mit t_i , sondern mit den Zeitpunkten $t_i^* = t_i - d_i/c$ weiter.

4. Weiters rechnen wir uns mit Gleichung (47) den Vektor \vec{C} und mit Gleichung (48) den Runge-Lenz Vektor aus und erhalten damit $e = |\vec{A}|/\mu$.
5. Als nächstes können wir über die Keplergleichung mit den Zeitpunkten t_i^* und t_0 die Werte für f_0 und f_i^* bestimmen. Dazu berechnen wir zuerst die exzentrische Anomalie $E_0(t_0)$ (dieser Wert bleibt für alle Iterationsschritte gleich) und erhalten aus folgender Gleichung E_i :

$$\frac{ab}{|\vec{C}|} (e \sin E_0 - E_0) + t_0 = T = \frac{C}{ab} (e \sin E_i - E_i) + t_i \quad (70)$$

und mit Gleichung (53) f_i^* .

6. Nun sind wir in der Lage, in die Formeln (59) und (60) einzusetzen, um die α_i und β_i zu erhalten.
7. Anschließend starten wir den Zyklus von neuem: Wir setzen also α_i und β_i wieder in das Gleichungssystem ein und erhalten die neuen Werte für \vec{a} und \vec{b} usw., bis sich \vec{a} und \vec{b} nicht mehr ändern.

Hinweis: Bei dieser Methode sind nicht allzu viele Schritte (ca. 10) notwendig, um die gewünschte Genauigkeit zu erhalten. Bei anderen Methoden sind manchmal bis zu 100 Iterationsschritte nötig.

Jetzt stellt sich eigentlich nur noch die Frage, welche Anfangswerte wir für α_i und β_i verwenden. Neusch geht einfach vom geraden Fall aus (für Kometen eine gar nicht so schlechte Näherung) und bestimmt daraus die α_i und β_i .

Aus der Definition (49) ist leicht ersichtlich, daß man mit

$$\alpha_i \approx 1 \quad \text{und} \quad \beta_i \approx \tau_i \quad (71)$$

und mit $\tau_i = t_i - t_0$ eine geradlinige Bahn erhält.

5.3 Bestimmung der Bahnelemente aus Orts- und Geschwindigkeitskoordinaten

Wenn wir nun die genauen Werte für \vec{a} und \vec{b} bestimmt haben, müssen wir daraus noch die klassischen Bahnelemente finden. Dabei hilft uns der in Abschnitt (3.2) gegebene Zusammenhang von \vec{A} und \vec{C} mit den Bahnelementen a, e, i, Ω, ω :

$$\vec{A} = A \begin{pmatrix} \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i \\ \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i \\ \sin \omega \sin i \end{pmatrix} \quad (72)$$

$$\vec{C} = C \begin{pmatrix} \sin \Omega \sin i \\ -\cos \Omega \sin i \\ \cos i \end{pmatrix} \quad (73)$$

Mit der z-Komponente von \vec{C} kann man die Inklination i ausrechnen. Wenn i bestimmt ist, erhält man aus C_x oder C_y den Wert für Ω und aus \vec{A}_z das Element ω .

$$C_z = \sin i \quad C_x = \sin \Omega \sin i \quad A_z = \sin \omega \sin i \quad (74)$$

Die Elemente e und p sind mit

$$A = |\vec{A}| = \mu e \quad \text{und} \quad C = |\vec{C}| = \sqrt{\mu p} \quad (75)$$

zu bestimmen. Jetzt fehlt uns noch die Zeit für den Periheldurchgang T . Aus der Keplergleichung folgt für die mittlere Zeit t_0 :

$$T = t_0 - \frac{ab}{|\vec{C}|} (E_0 - e \sin E_0) \quad (76)$$

(a und b kann man aus (27) berechnen.)

6 Berechnung ungestörter Ephemeriden aus den Bahnelementen

Mit der Entdeckung eines Kometen werden auch die klassischen Kegelschnittelemente veröffentlicht. Viele Programme erlauben nach Eingabe der Elemente und des gewünschten Zeitpunkts, die Berechnung der Ephemeriden. Ein solches Programm findet man in [20].

Als ersten Schritt müssen wir einen Zeitpunkt wählen, für den wir die Koordinaten am Himmel wissen wollen. Mit dieser Zeit berechnen wir über die Keplergleichung (70) die zugehörige Anomalie f .

Wir setzen die Breite u (Abbildung 6)

$$u := \omega + f \quad (77)$$

Wenn wir nur die Bahnelemente gegeben haben, dann bestimmen wir die rechtwinkligen heliozentrischen Koordinaten aus:

$$x = r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i) \quad (78)$$

$$y = r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i) \quad (79)$$

$$z = r \sin u \sin i \quad (80)$$

Natürlich ist bei der Veröffentlichung von Bahnelementen der Vektor \vec{r} und seine Länge nie gegeben, da er keine Bahnkonstante ist. Das macht aber nichts, denn wir brauchen für unsere Beobachtungen nur die Projektion an die Himmelskugel und nicht die Entfernung. Das heißt, wir können r den Wert Eins zuordnen.

Als nächstes wandeln wir das heliozentrische System, das sich bisher auf die Ekliptik bezog, in ein äquatoriales System $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ um.

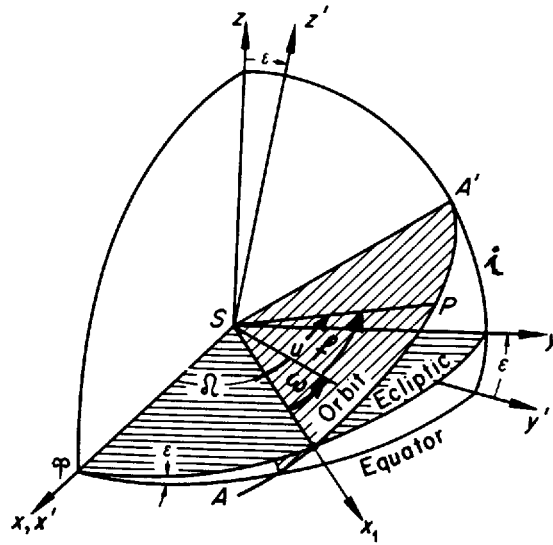


Abbildung 6: Zusammenhang zwischen verschiedenen Koordinatensystemen

$$\bar{x} = x \quad (81)$$

$$\bar{y} = y \cos \epsilon - z \sin \epsilon \quad (82)$$

$$\bar{z} = z \cos \epsilon + y \sin \epsilon \quad (83)$$

ϵ ist bekanntlich die Schiefe der Ekliptik, deren schwankende Werte mit folgender Näherungsformel auf aktuellen Stand gebracht werden (man kann aber auch in einem Jahrbuch nachsehen):

$$\epsilon = 23^{\circ}26'44.84'' - 0.4685''(t - 1950.0) \quad , \quad t \text{ in Jahren} \quad (84)$$

Jetzt gehen wir in geozentrische Koordinaten über. Dazu addieren wir die Sonnenkoordinaten $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ für unsere gewünschte Beobachtungszeit:

$$\bar{\xi} = \bar{x} + \bar{X}, \quad \bar{\eta} = \bar{y} + \bar{Y}, \quad \bar{\zeta} = \bar{z} + \bar{Z} \quad (85)$$

Schließlich finden wir die geozentrischen Äquatorialkoordinaten in polarer Form über:

$$\cos \delta \cos \alpha = \bar{\xi} \quad (86)$$

$$\cos \delta \sin \alpha = \bar{\eta} \quad (87)$$

$$\sin \delta = \bar{\zeta} \quad (88)$$

Somit haben wir Rektaszension α und Deklination δ für unseren Beobachtungszeitpunkt berechnet. Jetzt können wir ans Teleskop gehen und diese Koordinaten einstellen.

Literatur

- [1] Baule R. *Die scheinbare Eigenbewegung von Kometen, Sterne und Weltraum*, (7/1996)
- [2] Bauschinger J. *Die Bahnbestimmung der Himmelskörper*, Verlag von Wilhelm Engelmann (1928)

- [3] Budó A. *Theoretische Mechanik*, Deutscher Verlag der Wissenschaften (1980)
- [4] Dubyago A. *The Determination of Orbits*, The Macmillan Company (1961)
- [5] Guthmann A. *Einführung in die Himmelsmechanik und Ephemeridenrechnung*, BI-Verlag (1994)
- [6] I.A.U. Symposium No. 4 *The Motion, Evolution of Orbits, and Origin of Comets*, Reidel Publishing Company (1972)
- [7] Karttunen H. *Astronomie – Eine Einführung*, Springer Lehrbuch (1990)
- [8] Marsden B.G. *Initial Orbit Determination: The Pragmatist's Point of View*, *Astron. J.*, Vol. 90(8), p. 1541 (1985)
- [9] Marsden B.G. *The Computation of Orbits in Indeterminate and Uncertain Cases*, *Astron. J.* Vol. 102(4), p. 1539 (1991)
- [10] Middlehurst B., Kuiper G. *The Moon, Meteorites and Comets*, University of Chicago Press (1963)
- [11] Montenbruck O. *Grundlagen der Ephemeridenrechnung*, *Sterne und Weltraum*, Taschenbuch Nr. 10 (1984)
- [12] Montenbruck O. *Ephemerides of Minor Planets and Comets*, <http://www.eso.org/comet-hale-bopp/hale-bopp-eph-aproct96.txt>, (26. März 1996)
- [13] Neusch W. *A Simple Method of Orbit Determination*, *Astron. Astrophys.* 102, p. 59-64 (1981)
- [14] Porter J. *A Comparative Study of Perturbation Methods*, *Astron. J.*, 64-1264, p. 405, (Nov. 1958)
- [15] Quinn T., Tremaine S. *Planetary Perturbations and the Origin of Short-Period Comets*, *Astroph. J.*, No. 355, p. 667-697, (June 1., 1990)
- [16] Rahe J. *Natur und Herkunft der Kometen*, *Sterne und Weltraum* (7/8/1975)
- [17] Rimrott F. *Introductory Orbit Dynamics*, Vieweg (1989)
- [18] Scheck F. *Mechanik – Von den Newtonschen Gesetzen zum deterministischen Chaos*, Springer (1990)
- [19] Schneider M. *Himmelsmechanik Band 1,2*, BI Wissenschaftsverlag (1992)
- [20] Sinnott R. *Computing a Comet Ephemeris*, *Sky & Telescope*, (Dez. 1985)
- [21] Sitarski G. *Correction of Cometary Orbits Including the Perturbations in Differential Coefficients*, *Acta Astron.*, Vol 21, No. 1, p. 87, (1971)
- [22] Stracke G. *Bahnbestimmung der Planeten und Kometen*, Springer (1929)
- [23] Sterne T. *An Introduction to Celestial Mechanics*, Interscience Publishers (1960)
- [24] Stumpff K. *Himmelsmechanik Band 1,2,3*, Deutscher Verlag der Wissenschaften (1959)
- [25] Voigt H. *Abriss der Astronomie*, BI Wissenschaftsverlag (1991)
- [26] Yeomans D. *Comet Hale-Bopp Orbit and Ephemeris Information*, <http://newproducts.jpl.nasa.gov/comet/ephemjpl1.html>, (27. Juni 1996)
- [27] Yeomans D. *Comet Halley – The Orbital Motion*, *Astron. J.*, Vol. 82, No. 6, (June 1977)